Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 9 im Sommersemester 2021 (am 11.06.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.
y.z	verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

14 Kommutative lineare algebraische Gruppen

Limites von Funktionen auf $\mathbf{G}_m$, additive Funktionen

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori

14.2.13 Limites, die Graduierung von $k[D_n]$ und die Mengen $V(\pm\lambda)$

Wir betrachten hier die multiplikative Gruppe

$$\mathbf{G}_m = k^* \hookrightarrow k = \mathbb{A}^1$$

als offene Teilmenge der affinen Geraden, d.h. als affine Gerade ohne den Urprung, und die affine Gerade

$$\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1,\ x \mapsto [1,x],$$

als offene Teilmenge der projektiven Geraden, d.h. als projektive Gerade ohne den unendlich fernen Punkt. Außerdem beachten wir, daß der Automorphismus

$$\mathbf{G}_m \xrightarrow{\cong} \mathbf{G}_m,\ t \mapsto \frac{1}{t},$$

der multiplikativen Gruppe sich zu einem Automorphismus der projektiven Geraden

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1,\ [x,y] \mapsto [y,x],$$

fortsetzen läßt welcher Ursprung und unendlich fernen Punkt vertauscht. Dies motiviert die nachfolgenden Bezeichnungen $\lim_{a\to 0}$ und $\lim_{a\to\infty}$.

(i) Für jede reguläre Abbildung

$$\phi:\mathbf{G}_m \longrightarrow Z$$

mit Werten in einer algebraischen Varietät Z, welche sich zu einer regulären Abbildung

$$\overline{\phi}:\mathbb{A}^1 \longrightarrow Z,$$

fortsetzen läßt, schreiben wir

$$\lim_{a\to 0} \phi(a) = \overline{\phi}(0).$$

Wenn sich ϕ': $\mathbf{G}_m \longrightarrow Z$, $t \mapsto \phi(1/t)$, zu einer regulären Abbildung $\overline{\phi}'$:$\mathbb{A}^1 \longrightarrow Z$, forsetzen läßt, schreiben wir

$$\lim_{a\to\infty} \phi(a) = \overline{\phi}'(0).$$

(ii) Seien

$$T$$

ein Torus, V eine affine Varietät,

$$a: T \times V \longrightarrow V$$

eine Operation von T auf V (d.h. V sei ein affiner T-Raum). Wie in 2.3.5 bezeichnen wir mit

$$s: T \longrightarrow \mathbf{GL}(k[V]),\ t \mapsto s(t),$$

die zugehörige lokal endliche Operation von G auf dem Koordinatenring k[V] (vgl. 2.3.6 A), d.h.

$$(s(t)f)(x) = f(a(t^{-1},x))$$

für $t \in T$, $f \in k[V]$ und $x \in V$. Wie bisher setzen wir

$$X := \mathbf{X}^*(T) \text{ und } Y := \mathbf{X}_*(T)$$

(vgl. 3.2.1). Für $\chi \in X$ sei

$$k[V]_\chi := \{f \in k[V] \mid s(t)f = \chi(t)\bullet f \text{ für jedes } t \in T\}$$

der Eigenraum der Operation s bezüglich des Charakters χ. Nach 3.2.3 besteht eine direkte Summenzerlegung[1]

$$k[V] = \oplus_{\chi\in X}\, k[V]_\chi$$

Nach Definiton der Eigenräume gilt

$$k[V]_\chi \bullet k[V]_\psi = k[V]_{\chi+\psi} \text{ für } \chi, \psi \in X.$$

Der Koordinatenring k[V] besitzt eine X-Graduierung. Im Fall $T = \mathbf{D}_n$ ist $X = \mathbb{Z}^n$ und wir erhalten eine graduierte k-Algebra im üblichen Sinne.

(iii) Für jedes $\lambda \in Y$ definieren wir

$$V(\lambda) := \{v \in V \mid \lim_{a\to 0} \lambda(a)\bullet v \text{ existiert }\}$$

$$V(-\lambda) := \{v \in V \mid \lim_{a\to\infty} \lambda(a)\bullet v \text{ existiert }\}$$

---

[1] Jedes $f \in k[V]$ liegt in einem endlich-dimensionalen T-stabilen Unterraum $W \subseteq k[V]$. Die zugehörige rationale Darstellung $T \longrightarrow \mathbf{GL}(W)$ zerfällt in eine direkte Summe 1-dimensionale Darstellungen (nach 3.2.3), d.h. es gilt

$$f \in W = \sum_{\chi\in X} W\bigcap k[T]_\chi \subseteq \sum_{\chi\in X} k[V]_\chi \subseteq k[V]$$

also

$$k[V] \subseteq \sum_{\chi\in X} k[V]_\chi \subseteq k[V].$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Charaktere ist die Summenzerlegung direkt.

Man beachte, nur eine der beiden Relationen ist eine Definition und jede von ihnen eine Folge der anderen. Zum Beispiel gilt wegen $(-\lambda)(a) = \frac{1}{\lambda(a)}$ auf Grund der ersten Definition

$$\begin{aligned} V(-\lambda) &= \{v \in V \mid \lim_{a\to 0} (-\lambda)(a)\bullet v \text{ existiert } \} \\ &= \{v \in V \mid \lim_{a\to 0} \lambda(a)^{-1}\bullet v \text{ existiert } \} \\ &= \{v \in V \mid \lim_{a\to 0} \lambda(a^{-1})\bullet v \text{ existiert } \} \ (\lambda \text{ ist ein Gruppen-Homomorphismus}) \\ &= \{v \in V \mid \lim_{a\to \infty} \lambda(a)\bullet v \text{ existiert } \} \end{aligned}$$

14.2.14 Eigenschaften der Mengen V(λ)

Seien V eine affine Varietät, T ein Torus und

$$a:\ T \times V \longrightarrow V$$

eine Operation von T auf V (d.h. V sei ein T-Raum). Für jedes $\lambda \in X_*(T)$ gilt dann mit den Bezeichnungen von 3.2.13:

(i) $V(\lambda)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von V.

(ii) $V(\lambda) \bigcap V(-\lambda) = \{v \in V \mid \lambda(c)\bullet v = v \text{ für jedes } c \in k^*\}$
ist die Menge der Fixpunkte von $\mathrm{Im}(\lambda)$.

Beweis. Zu (i). Sei $v \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v \in V(\lambda) &\Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \lambda(t)\bullet v \text{ existiert} \qquad \text{(vgl. 3.2.13 (iii))} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow V,\ t \mapsto \lambda(t)\bullet v, \text{ läßt sich auf } \mathbb{A}^1 \text{ fortsetzen}^2 \\ &\Leftrightarrow k[V] \longrightarrow k[\mathbf{G}_m],\ f \mapsto (c \mapsto f(\lambda(c)\bullet v)), \\ &\qquad \text{faktorisiert}^3 \text{ sich über } k[\mathbb{A}^1] = k[x] \hookrightarrow k[x,x^{-1}] = k[\mathbf{G}_m] \end{aligned}$$

Dabei ist $\lambda(c)\bullet v$ das Bild von v bei der Operation a von $\lambda(c) \in T$ auf V. Für die zu a gehörige lokal endliche Operation $s: T \longrightarrow \mathbf{GL}(k[V])$ der abstrakten Gruppe T auf k[V] gilt (vgl. 2.3.6 A)

$$(s(t)f)(v) = f(a(t^{-1}, v)) = f(t^{-1}v),$$

also

$$f(\lambda(c)\bullet v) = (s(\lambda(c)^{-1})f)(v) = (s(\lambda(c^{-1}))f)(v). \qquad (1)$$

Wir können also die Bedingung $v \in V(\lambda)$ mit Hilfe von s wie folgt ausdrücken.

---

[2] d.h. die Abbildung ist Teil eines kommutativen Diagramms
$$\begin{array}{ccc} & & G_m \longrightarrow V \\ & \nearrow & \uparrow \\ \mathbb{A}^1 & & \end{array}$$
von regulären Abbildungen.

[3] d.h. die Abbildung ist Teil eines kommutativen Diagramms
$$\begin{array}{ccc} & & k[G_m] \longleftarrow k[V] \\ & \swarrow & \uparrow \\ k[\mathbb{A}^1] & & \end{array}$$
von k-Algebra-Homomorphismen.

$$v \in V(\lambda) \quad \Leftrightarrow k[V] \longrightarrow k[\mathbf{G}_m],\ f \mapsto (t \mapsto (s(\lambda(t^{-1}))f)(v)),$$
$$\text{faktorisiert sich über } k[\mathbb{A}^1] \longrightarrow k[\mathbf{G}_m].$$

Nach 3.2.13 (ii) hat f die Gestalt

$$f = \sum_{\chi \in X^*(T)} f_\chi \text{ mit } f_\chi \in k[V]_\chi.$$

Weil $s(t) \in \mathbf{GL}(k[V])$ eine k-lineare Abbildung ist, folgt

$$s(t)f = \sum_{\chi \in X^*(T)} s(t)f_\chi$$
$$= \sum_{\chi \in X^*(T)} \chi(t)f_\chi. \qquad \text{(nach Definition von } k[V]_\chi)$$

Wir setzen für $t \in T$ den Wert $\lambda(c)$ mit $c \in k^*$ ein und erhalten

$$s(\lambda(c))f = \sum_{\chi \in X^*(T)} \chi(\lambda(c))f_\chi$$
$$= \sum_{\chi \in X^*(T)} c^{<\chi,\lambda>} f_\chi \qquad \text{(nach Definition von } <\ ,\ > \text{ in 3.2.11 A)}$$

also

$$(s(\lambda(c))f)(v) = \sum_{\chi \in X^*(T)} c^{<\chi,\lambda>} f_\chi(v). \tag{2}$$

Damit bekommt die Bedingung für $v \in V(\lambda)$ die Gestalt

$$v \in V(\lambda) \quad \Leftrightarrow k[V] \longrightarrow k[\mathbf{G}_m],\ f \mapsto (c \mapsto \sum_{\chi \in X^*(T)} c^{-<\chi,\lambda>} f_\chi(v)).$$
$$\text{faktorisiert sich über } k[\mathbb{A}^1] \longrightarrow k[\mathbf{G}_m]$$

Nun ist $k[\mathbb{A}^1]$ eine Polynomalgebra über k in einer Unbestimmten, sagen wir,

$$k[\mathbb{A}^1] = k[x]$$

und

$$k[\mathbf{G}_m] = k[x, x^{-1}].$$

Beide Algebren sind Teilalgebren des rationalen Funktionenkörpers k(x), also auch Teilringe voneinander. Die Aussage, daß sich die angegebene Abbildung über k[x] faktorisiert, bedeutet einfach, daß ihr Bild in k[x] liegt. Es folgt

$$v \in V(\lambda) \quad \Leftrightarrow \sum_{\chi \in X^*(T)} x^{-<\chi,\lambda>} f_\chi(v) \in k[x] \text{ für jedes } f \in k[V]$$
$$\Leftrightarrow f_\chi(v) = 0 \text{ für jedes } f \in k[V] \text{ und jedes } \chi \in X^*(T) \text{ mit } <\chi, \lambda> > 0.$$
$$\Leftrightarrow f(v) = 0 \text{ für jedes } \chi \in X^*(T) \text{ und jedes } f \in k[V]_\chi \text{ mit } <\chi, \lambda> > 0.$$
$$\Leftrightarrow v \in V(\ f \in k[V]_\chi \mid \chi \in X^*(T) \text{ und } 0 < <\chi, \lambda>\ )$$

Wir haben gezeigt,

$$V(\lambda) = V(f \in k[V]_\chi \mid \chi \in X^*(T) \text{ und } 0 < \langle \chi, \lambda \rangle). \tag{3}$$

Insbesondere ist $V(\lambda)$ eine abgeschlossene Teilmenge von V, d.h. es gilt (i).
Zu (ii). Aus der gerade bewiesenen Identität (3) erhalten wir

$$V(\lambda) \bigcap V(-\lambda) = V(f \in k[V]_\chi \mid \chi \in X^*(T) \text{ und } 0 \neq \langle \chi, \lambda \rangle). \tag{4}$$

Wir haben zu zeigen, diese Menge ist gleich

$$\{v \in V \mid \lambda(c) \bullet v = v \text{ für jedes } c \in k^*\}. \tag{5}$$

1. Schritt. Die Menge (5) liegt ganz in $V(\lambda) \bigcap V(-\lambda)$.

Sei v ein Element der Menge (5) und $f \in k[V]_\chi$ mit $\chi \in X^*(T)$ und $0 \neq \langle \chi, \lambda \rangle$. Wir haben zu zeigen $f(v) = 0$.

Für jedes $c \in k^*$ gilt

$f(v) = f(\lambda(c) \bullet v)$ (weil v in der Menge (5) liegt).

Die rechte Seite ist nach (1) gleich $(s(\lambda(c^{-1}))f)(v)$ und zusammen mit (2) gleich

$$c^{-\langle \chi, \lambda \rangle} f(v),$$

denn wegen $f \in k[V]_\chi$ ist höchsten ein Summand auf der rechten Seite von (2) ungleich Null. Es folgt

$f(v) = c^{-\langle \chi, \lambda \rangle} f(v)$ für jedes $c \in k^*$,

also

$0 = (1 - c^{-\langle \chi, \lambda \rangle}) \bullet f(v)$ für jedes $c \in k^*$

Weil nach Vorausetzung $\langle \chi, \lambda \rangle$ ungleich 0 ist, hat die Gleichung $1 - c^{-\langle \chi, \lambda \rangle} = 0$ nur endlich viele Lösungen $c \in k^*$. Weil k algebraische abgeschlossen, also unendich ist, kann man $c \in k^*$ so wählen, daß $1 - t^{-\langle \chi, \lambda \rangle} \neq 0$ gilt. Es folgt $f(v) = 0$, wie behauptet.

2. Schritt. Jeder Punkt von $V(\lambda) \bigcap V(-\lambda)$ liegt in der Menge (5).

Sei $v \in V(\lambda) \bigcap V(-\lambda)$. Angenommen, v liegt nicht in der Menge (5). Dann gibt es ein $c \in k^*$ mit

$$\lambda(c) \bullet v \neq v.$$

Die Punkte $\lambda(c) \bullet v$ und v haben unterschiedliche Koordinaten (bezüglich irgendeiner Einbettung von V in einen k^n). Es gibt also ein $f \in k[V]$ mit

$$f(\lambda(c) \bullet v) \neq f(v). \tag{6}$$

Nach 3.2.13 (ii) hat f die Gestalt

$$f = \sum_{\chi \in X^*(T)} f_\chi \text{ mit } f_\chi \in k[V]_\chi.$$

Wenn man in (6) die Funktion f durch f_χ ersetzt, so kann nicht für alle χ das Gleichheitszeichen gelten (weil es dann auf für f gelten würde). Es gibt also ein $\chi \in X^*(T)$ mit

$$f_\chi(\lambda(t) \bullet v) \neq f_\chi(v).$$

Wegen (1), (2) und $f_\chi \in k[V]_\chi$ ist das äquivalent zu

$$c^{-<\chi,\lambda>} \cdot f_\chi(v) \neq f_\chi(v),$$

also zu

$$0 \neq (1 - t^{-<\chi,\lambda>}) f_\chi(v)$$

Das bedeutet aber,

$$0 \neq 1 - t^{-<\chi,\lambda>} \text{ und } 0 \neq f_\chi(v)$$

Die erste Bedingung bedeutet $<\chi, \lambda> \neq 0$. Zusammen mit der zweiten Bedingung und mit (4) bedeutet dies, daß v nicht in $V(\lambda) \bigcap V(-\lambda)$ liegt. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von v. Die Annahme, daß v nicht in der Menge (5) liegt ist somit falsch.
QED.

14.2.15 Beispiel

Seien G eine beliebige lineare algebraische Gruppe und $\lambda: \mathbf{G}_m \longrightarrow G$ ein Kocharakter von G. Wir betrachten die folgende Operation von $\mathbf{G}_m$ auf G,

$$a: \mathbf{G}_m \times G, (t, x) \mapsto t \cdot x = \lambda(t) \cdot x \cdot \lambda(t)^{-1}.$$

Weiter sei wie in 3.2.13 (iii)

$$P(\lambda) := \{x \in G \mid \lim_{t \to 0} t \cdot x \text{ existiert } \}.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $P(\lambda)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G.

(ii) $P(\lambda) \bigcap P(-\lambda) = Z_G(\lambda(\mathbf{G}_m))$.

Zu (i). Nach 3.2.14 (i) ist $P(\lambda)$ eine abgeschlossene Teilmenge von G. Für $x \in G$ gilt

$$x \in P(\lambda) \Leftrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow G, t \mapsto \lambda(t) \cdot x \cdot \lambda(t)^{-1}, \text{ läßt sich auf } \mathbb{A}^1 = k \text{ fortsetzen}$$

Für $x = e$ ist die Abbildung rechts die konstante Abbildung $t \mapsto e$, welche trivialerweise eine Fortsetzung besitzt, d.h. es gilt

$$e \in P(\lambda).$$

Sind $x, y \in P(\lambda)$ und $f_x, f_y: \mathbb{A}^1 \longrightarrow G$ die zugehörigen Fortsetzungen auf $\mathbb{A}^1$. Dann sind die regulären Abbildungen

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow G, t \mapsto f_x(t) \cdot f_y(t) = \mu(f_x(t), f_y(t)),$$

und

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow G, t \mapsto f_x(t)^{-1} = i(f_x(t)),$$

die zu $x \cdot y$ bzw. x^{-1} gehörigen Fortsetzungen. Es bestehen also die Implikationen

$$x, y \in P(\lambda) \Rightarrow x \cdot y \in P(\lambda) \text{ und } x \in P(\lambda) \Rightarrow x^{-1} \in P(\lambda).$$

Wir haben gezeigt, $P(\lambda)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe.
Zu (ii). Nach 3.2.14 (ii) ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) \bigcap P(-\lambda) &= \{v \in V \mid \lambda(c) \cdot v = v \cdot \lambda(c) \text{ für jedes } c \in k^*\} \\ &= Z_G(\mathrm{Im}(\lambda)) \end{aligned}$$

der Zentralisator von $\mathrm{Im}(\lambda)$ in G (vgl. 3.2.8).

Bemerkung
Die Verwendung der Ergebnisse von 3.2.14 in der hier vorliegenden Situation erscheint zunächst problematisch, da in 3.2.14 der Kocharakter λ ein Kocharakter eines Torus sein soll. Tatsächlich ist dies auch hier der Fall: betrachtet man G als abgeschlossene Untergruppe einer $\mathbf{GL}_n$ so besteht $\lambda(\mathbf{G}_m)$ aus kommutierenden halbeinfachen Matrizen. Nach 2.4.2 A (ii) kann man durch einen inneren Automorphismus von $\mathbf{GL}_n$ dafür sorgen, daß $\lambda(\mathbf{G}_m)$ aus Diagonalmatrizen besteht. Man kann dann λ als Abbildung

$$\lambda: \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{D}_n$$

betrachten, d.h. als Kocharakter des Torus $\mathbf{D}_n$.

14.3 Additive Funktionen

In 3.1 wurde bewiesen, daß jede kommutative lineare algebraische Gruppe G die Gestalt

$$G = G_s \times G_u$$

hat mit einer diagonalisierbaren abelschen Gruppe G_s und einer unipotenten abelschen Gruppe G_u. In 3.2 haben wir einen vollständigen Überblick gewonnen über alle diagonlisierbaren linearen algebraischen Gruppen: zu jeder vorgebenen endlich erzeugten abelschen Gruppe X (die im Fall einer positiven Charakteristik p des Grundkörper keine p-Torsion haben darf) gibt es bis auf Isomorphie genau eine abelsche unipotente Gruppe mit der Charaktergruppe X.

Eine ähnlich vollständige Übersicht gibt es auch im unipotenten Fall. Allerdings muß man dann anstelle der von uns betrachteten linearen algebraischen Gruppen affine Gruppen-Schemata zulassen, d.h. algebraische Gruppen, deren Strukturgarben nilpotente Elemente besitzen dürfen. Die unipotenten abelschen Gruppen-Schemata entsprechen dann den Moduln endlicher Länge über dem Dieudonné-Ring. Dies ist ein nicht-kommutativer Ring, der den Witt-Ring des (algebraisch abgeschlossenen) Grundkörpers enthält und von zwei Elementen erzeugt wird. Leider ist diese Theorie jenseits der Möglichkeiten dieser Vorlesung. Außerdem würde uns die Theorie von unserem eigentlichen Ziel, der Klassifikation der halbeinfachen und der reduktiven linearen algebraischen Gruppen mit Hilfe von Wurzelsystemen, entfernen.

Wir beschränken uns deshalb auf einen Kompromis, nämlich auf die Klassifikation der elementaren unipotenten Gruppen. Die Klassifikation ist in der Charakteristik 0 vollständig und ignoriert einige Fälle bei positiver Charakteristik. Trotzdem ist die Behandlung des unipotenten Falls aufwendiger als die des diagonalisierbaren. Wir beginnen deshalb mit einem separaten Abschnitt, der sich ausschließlich mit den additiven Funktionen beschäftigt, die im unipotenten Fall ähnlich bedeutsam sind, wie die Charaktere im diagonlisierbaren Fall.

Auch im nachfolgenden Abschnitt, der sich mit den elementaren unipotenten Gruppen beschäftigt, wird es die meiste Zeit um die additiven Funktionen gehen. Eine Anwendung ist die Klassifikation der elementaren unipotenten Gruppen. Als eine Folgerung erhalten wir eine vollständige Übersicht über die zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppen der Dimension 1. Letztere ist das eigentliche Ziel dieses Kapitels. Alle anderen Ergebnisse finden sich hier hauptsächlich deshalb, weil sie sich ohne großen zusätzlichen Aufwand beweisen lassen.

14.3.1 Defintionen, Bezeichnungen und Konstruktionen

3.3.1 A Begriff der additiven Funktion

Eine additive Funktion auf einer linearen algebraischen Gruppe G ist ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen

$$f: G \longrightarrow \mathbf{G}_a.$$

Bemerkungen

(i) Die additiven Funktionen auf G bilden (als Funktionen mit Werten in $\mathbf{G}_a = k$) einen k-linearen Unterraum

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$$

des Koordinaten-Rings k[G].

(ii) Ist $F \subseteq k$ ein Teilkörper des Grundkörpers k und G eine F-Gruppe, so bezeichne

$$\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)[F] \qquad (\subseteq \mathcal{A}(G))$$

die Menge der über F definierten additiven Funktionen auf G. Dies ist ein linearer Unterraum des F-Vektorraums F[G]. Für jedes $f \in F[G]$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) $f \in \mathcal{A}(G)(F)$.

(b) $\Delta f = f \otimes 1 + 1 \otimes f$.

Dabei bezeichne Δ die Komultiplikation von G.

(iii) Ist G eine F-Gruppe, so ist $\mathcal{A}(G)(F)$ eine F-Struktur von $\mathcal{A}(G)$, d.h. die natürliche Einbettung

$$\mathcal{A}(G)(F) \hookrightarrow \mathcal{A}(G)$$

induziert einen linearen Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$k \otimes_F \mathcal{A}(G)(F) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(G)$$

(iv) Ist die Charakteristik p des Grundkörpers k von Null verschieden,

$$p > 0,$$

so ist die p-te Potenz einer addiven Funktion erneut eine additive Funktion auf G. Diese Tatsache ist der Grund für die Einführung eines Rings, über welchem der Vektorraum $\mathcal{A}$ ein Modul ist.

Beweis. Zu (i). Jede additive Fumkton $f: G \longrightarrow \mathbf{G}_a$ induziert als reguläre Abbildung einen k-Algebra-Homomorphismus

$$f^*: k[T] = k[\mathbf{G}_a] \longrightarrow k[G], \ (\mathbf{G}_a = k \xrightarrow{p} k) \mapsto (G \xrightarrow{p \circ f} k).$$

Dabei bezeichnet T eine einzelne Unbestimmte (vgl. 2.1.4 Beispiel 1). Insbesondere gilt $f^*(T) \in k[G]$. Das Polynom p = T ist als Abbildung $k \longrightarrow k$ gerade die identische Abbildung, d.h. es gilt

$$f^*(T) = T \circ f = Id \circ f = f,$$

Damit ist $f = f^*(T) \in k[G]$ ein Element des Koordinatenrings von G. Wir haben gezeigt, die Menge der additiven Funktionen ist eine Teilmenge der Koordinatenrings,

$$\mathcal{A}(G) \subseteq k[G].$$

Eine Funktion des Koordinatenrings k[G] ist eine reguläre Abbildung

$$f: G \longrightarrow k = \mathbf{G}_a.$$

Sie ist genau dann eine additive Funktion, wenn sie ein Gruppen-Homomorphismus ist, d.h. es gilt

$$\mathcal{A}(G) = \{ f \in k[G] \mid f(x \bullet y) = f(x) + f(y) \text{ für } x,y \in G \}$$

Aus dieser Beschreibung lesen wir ab, $\mathcal{A}(G)$ ist ein k-linearer Unterraum von k[G].
Zu (ii). Nach Definition gilt

$$\mathcal{A}(G)(F) = \mathcal{A}(G) \bigcap F[G].$$

Weil $\mathcal{A}(G)$ nach (i) ein linearer Unterraum des k-Vektorraums k[G] ist, ist der Durchschnitt ein F-linearer Unterraum von F[G]. Sei jetzt

$$f \in F[G]$$

eine über F definierte reguläre Funktion auf G (also insbesondere eine reguläre Abbildung $G \longrightarrow k = G_a$). Dann ist f genau dann eine additive Funktion auf G, wenn das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{f\times f} & \mathbf{G}_a\times\mathbf{G}_a \\ \mu\downarrow & & \downarrow\mu_a \\ G & \xrightarrow{f} & \mathbf{G}_a \end{array}$$

Dabei sollen die vertikalen Abbildungen die Gruppen-Multiplikation bezeichnen. Die Kommutativität dieses Diagramms ist äquivalent zu der des zugehörigen Diagramms der Koordinatenringe und k-Algebra-Homomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} k[G]\otimes_k k[G] & \xleftarrow{f^*\otimes f^*} & k[\mathbf{G}_a]\otimes_k k[\mathbf{G}_a] & = & k[T]\otimes_k k[T] \\ \Delta\uparrow & & \uparrow\Delta_a & & \\ k[G] & \xleftarrow{f^*} & k[\mathbf{G}_a] & = & k[T] \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sollen dabei die Komultiplikationen von G bzw. $\mathbf{G}_a$ bezeichnen. Die Komulitiplikation von $\mathbf{G}_a$ ist der k-Algebra-Homomorphismus mit

$$\Delta_a(T) = 1\otimes T + T\otimes 1$$

(vgl. 2.1.4 Beispiel 1). Der k-Algebra-Homomorphismus f* ist durch dessen Wert f an der Stelle T gegeben. Die Kommutativität des Diagramm ist äquivalent zu der Bedingung

$$\Delta(f^*(T)) = (f^*\otimes f^*)(\Delta_a(T).$$

d.h. zu

$$\Delta(f^*(T)) = (f^*\otimes f^*)(1\otimes T+T\otimes 1) = 1\otimes f^*(T) + f^*(T)\otimes 1,$$

also zu

$$\Delta(f) = 1\otimes f + f\otimes 1.$$

Wir haben gezeigt, $f \in F[G]$ ist genau dann additiv, wenn $\Delta f = 1\otimes f + f\otimes 1$ gilt, d.h. f liegt genau dann in $\mathcal{A}(G)\bigcap F[G] = \mathcal{A}(G)(F)$, wenn Bedingung (b) erfüllt ist.
Zu (iii). Nach Bemerkung (ii) gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(G) &= \{f \in k[G] \mid \Delta(f) = 1\otimes f + f\otimes 1 \} \\ &= \mathrm{Ker}(\varphi: k[G] \longrightarrow k[G]\otimes_k k[G],\ f \mapsto \Delta(f) - 1\otimes f + f\otimes 1 \} \end{aligned}$$

Weil G eine F-Gruppe ist, ist Δ: $k[G] \longrightarrow k[G]\otimes_k k[G]$ über F definiert, d.h. von der Gestalt

$$\Delta = k\otimes_F \Delta_F$$

mit einer F-linearen Abbildung

$$\Delta_F: F[G] \longrightarrow F[G]\otimes_F F[G].$$

Damit hat φ die Gestalt $k\otimes\varphi_F$ mit der F-linearen Abbildung

$$\varphi_F\colon F[G] \longrightarrow F[G]\otimes_F F[G],\ f \mapsto \Delta_F(f) - 1\otimes f + f\otimes 1.$$

Als exakter Funktor kommutiert $k\otimes_F$ mit Kernen, d.h. es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(G) &= \mathrm{Ker}(\phi)\\ &= \mathrm{Ker}(k\otimes_F\varphi_F)\\ &= k\otimes_F\mathrm{Ker}(\varphi_F).\end{aligned}$$

Damit wird $\mathcal{A}(G)$ als k-Vektorraum von Elementen aus

$$\mathrm{Ker}(\varphi_F) \subseteq F[G]$$

erzeugt, d.h. von additiven Funktionen von G, die über F definiert sind, nämlich von Elementen aus

$$\mathrm{Ker}(\varphi_F) \subseteq \mathcal{A}(G)(F)\ (\subseteq F[G])$$

Aus den natürlichen Einbettungen

$$\mathrm{Ker}(\varphi_F) \hookrightarrow \mathcal{A}(G)(F) \hookrightarrow F[G]$$

erhalten wir durch Anwenden des Funktor $k\otimes_F$ die injektiven k-linearen Abbildungen

$$\mathcal{A}(G) = k\otimes_F\mathrm{Ker}(\varphi_F) \hookrightarrow k\otimes_F\mathcal{A}(G)(F) \hookrightarrow k\otimes_F F[G] = k[G].$$

Wegen $\mathcal{A}(G)(F) \subseteq \mathcal{A}(G)$ und weil $\mathcal{A}(G)$ ein k-Vektorraum ist, liegt das Bild des Tensorprodukts $k\otimes_F\mathcal{A}(G)(F)$ bei der rechten Inklusion ganz in $\mathcal{A}(G)$, d.h. wir haben injektive k-lineare Abbildungen

$$\mathcal{A}(G) = k\otimes_F\mathrm{Ker}(\varphi_F) \hookrightarrow k\otimes_F\mathcal{A}(G)(F) \hookrightarrow \mathcal{A}(G).$$

Deren Zusammensetzung die ist identische Abbildung. Die Injektionen sind sogar Bijektionen und die natürliche Einbettung

$$\mathcal{A}(G)(F) \hookrightarrow \mathcal{A}(G)(k)$$

induziert einen Isomorphismus

$$k\otimes_F\mathcal{A}(G)(F) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(G)(k).$$

Zu (iv). Für $f \in \mathcal{A}(G)$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta(f^p) &= (\Delta f)^p && (\Delta \text{ ist ein k-Algebra-Homomorphismus})\\ &= (f\otimes 1+1\otimes f)^p && (\text{nach Bemerkung (ii) mit } F = k)\\ &= (f\otimes 1)^p+(1\otimes f)^p && (\text{die Charakteristik von k ist } p > 0)\\ &= f^p\otimes 1 +1\otimes f^p && (\text{Definition der Multiplikation in } k[G]\otimes k[G])\end{aligned}$$

Nach Bemerkung (ii) ist f^p eine additive Funktion.
QED.

Index

—A—

additive Funktion, 8

—F—

Funktion
additive, 8

Inhalt

LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

14 KOMMUTATIVE LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori 1
14.2.13 Limites, die Graduierung von $k[D_n]$ und die Mengen $V(>\lambda)$ 1
14.2.14 Eigenschaften der Mengen $V(\lambda)$ 3
14.2.15 Beispiel 6

14.3 Additive Funktionen 7
14.3.1 Defintionen, Bezeichnungen und Konstruktionen 8

INDEX 10

INHALT 11